철학자를 위한 물리학 양자역학 1

그림 13-3 : 1927년 솔베이 국제회의에 참가한 물리학자들. 앞줄 왼쪽부터 플랑크(두 번째), 퀴리부인(세번째), 로렌츠(네 번째), 아인슈타인(다섯 번째)와 가운데 줄 왼쪽부터 디랙(다섯 번째), 드브로이(일곱 번째), 보른(여덟 번째), 보어(아홉 번째), 뒷줄 왼쪽부터 슈뢰딩거(여섯 번째), 하이젠베르크(아홉 번째).

장 회 익

2020.4.21

경희대학교

제4道 양자역학

처음 상태 $\Longrightarrow$ 나중 상태

<변화의 원리>

$$\Psi_o(x, t) \quad \Longrightarrow \quad \Psi(x, t)$$

$$i\hbar(\partial/\partial t)\Psi = -(\hbar^2/2m)(\partial^2/\partial x^2)\Psi + V(x)\Psi$$

$$\sum_i c_i \psi_i \Longrightarrow \sum_i c'_i \psi_i$$

상태함수 $\Psi(x, t)$란 무엇인가?

4차원 복합공간 $(x, t) \Leftrightarrow (k, \omega)$

$$(p, E) \Rightarrow \hbar(k, \omega)$$

그림 13-3 : 1927년 솔베이 국제회의에 참가한 물리학자들. 앞줄 왼쪽부터 플랑크(두 번째), 퀴리부인(세번째), 로렌츠(네 번째), 아인슈타인(다섯 번째)와 가운데 줄 왼쪽부터 디랙(다섯 번째), 드브로이(일곱 번째), 보른(여덟 번째), 보어(아홉 번째), 뒷줄 왼쪽부터 슈뢰딩거(여섯 번째), 하이젠베르크(아홉 번째).

솔베이 학술회의

벨기에의 화학자 출신 에르스트 솔베이가 후원하여 3년에 한번씩 초청받은 인원만으로 1911년부터 운영되던 솔베이 회의는 특히 1927년의 5차 회의가 특히 유명하다.

1927년 10월 24일부터 29일까지 명목상 "전자와 광자(Electrons and Photons)"를 주제로 브뤼셀에서 개최되었던 제5회 솔베이 학술회의에 참석한 29명 중 17명이 노벨상을 받았다.

역사상 가장 화려한 대가들이 모여 ‘양자역학의 해석’ 문제를 놓고 열띤 논쟁을 보였다.

양자역학의 역사 1

1900 Max Planck 흑체복사

$E = nh\nu \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ \nu = \omega/2\pi$

$h = 6.626 \times 10^{-34}$ J. s

1905 Albert Einstein 광전효과 $E = h\nu$

$K_{max} = E - \varphi = h\nu - \varphi$

1913 Niels Bohr 수소원자 $U(r) = -(1/4\pi\varepsilon_o)e^2/r$

$L = n\hbar \equiv nh/(2\pi)$ ($L = mvr$)

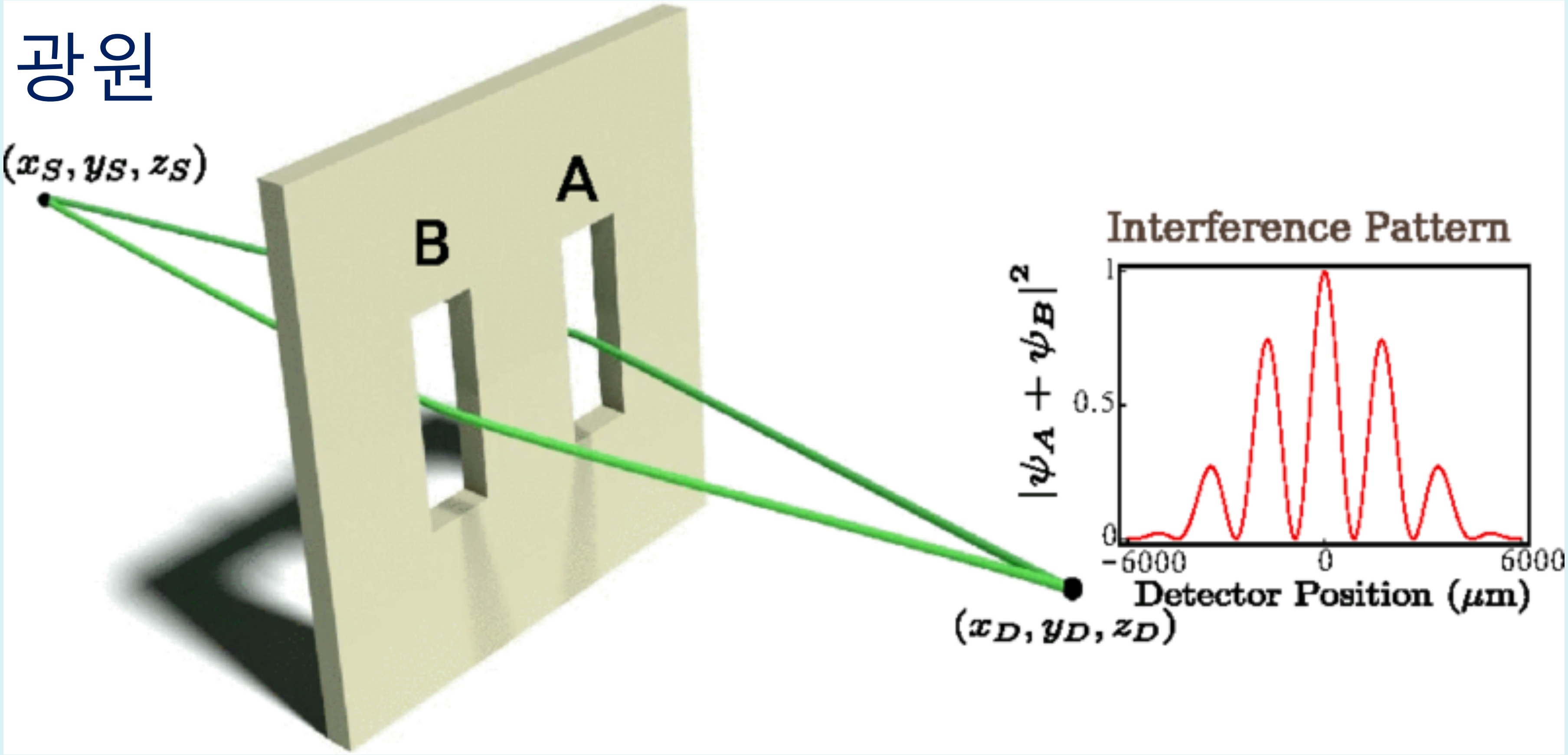
$E = -[me^4/(8\varepsilon_o{}^2h^2)](1/n^2)$

$h\nu = E_i - E_f$

양자역학의 역사 2

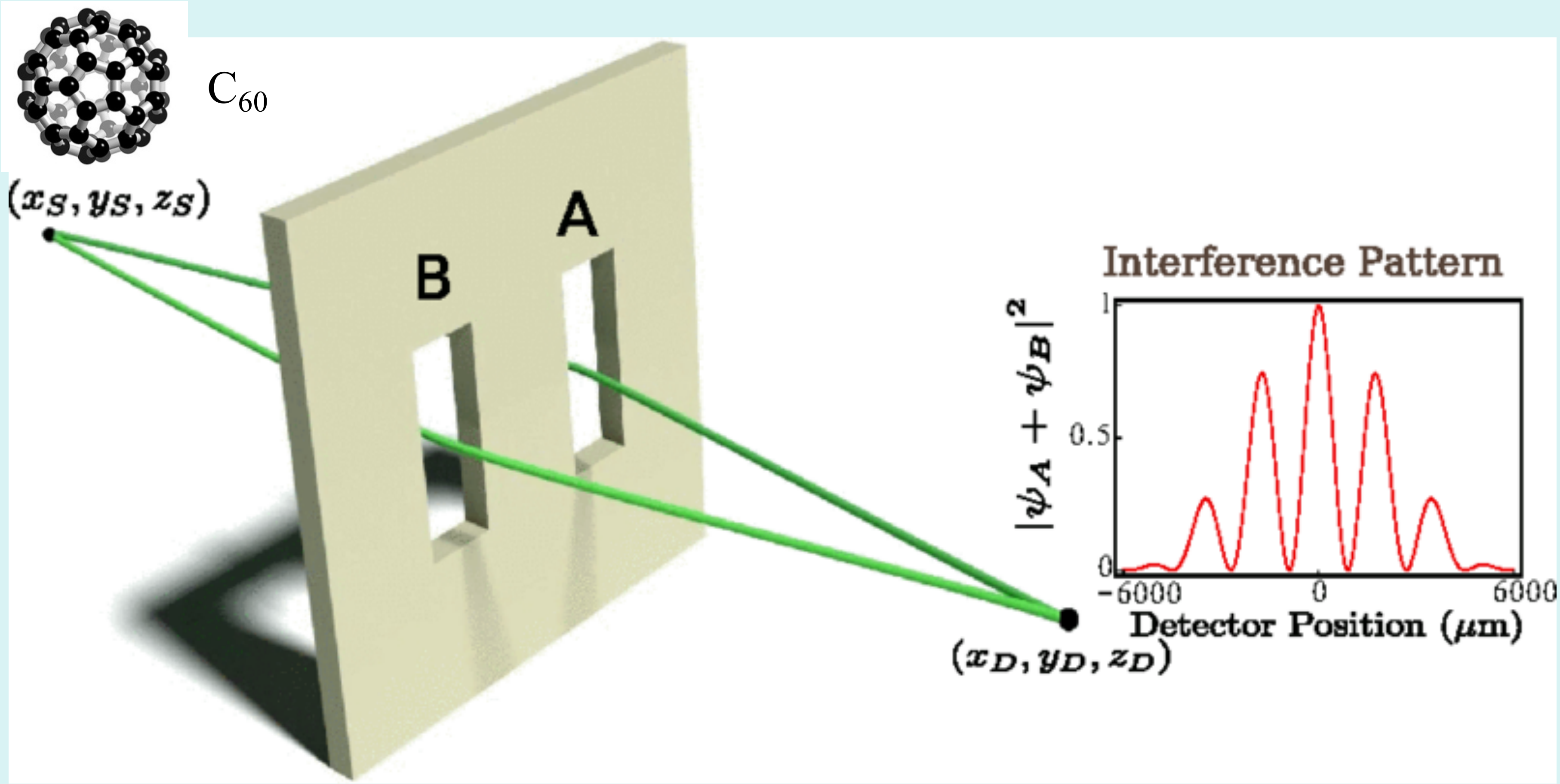
1924 Louis de Broglie
입자의 파동설 $\lambda = h/p$ 상대론 $p^2 - (E/c)^2 = -mc^2$
$m=0$: $p = E/c = h\nu/\nu\lambda = h/\lambda$
1925 Werner Heisenberg 행렬역학 제안
1926: Erwin Schrodinger 슈뢰딩거 방정식 제안
1926: Davisson and Germer 입자파의 실험적 확인
Ni 표면에서의 회절 (X선 회절과 같은 결과)
1927: Thomson and Reid Al 박막 투과 실험
1927: Max Born 파동 함수의 확율적 해석
1927: Werner Heisenberg 불확정성원리 제안

이중 슬릿 실험

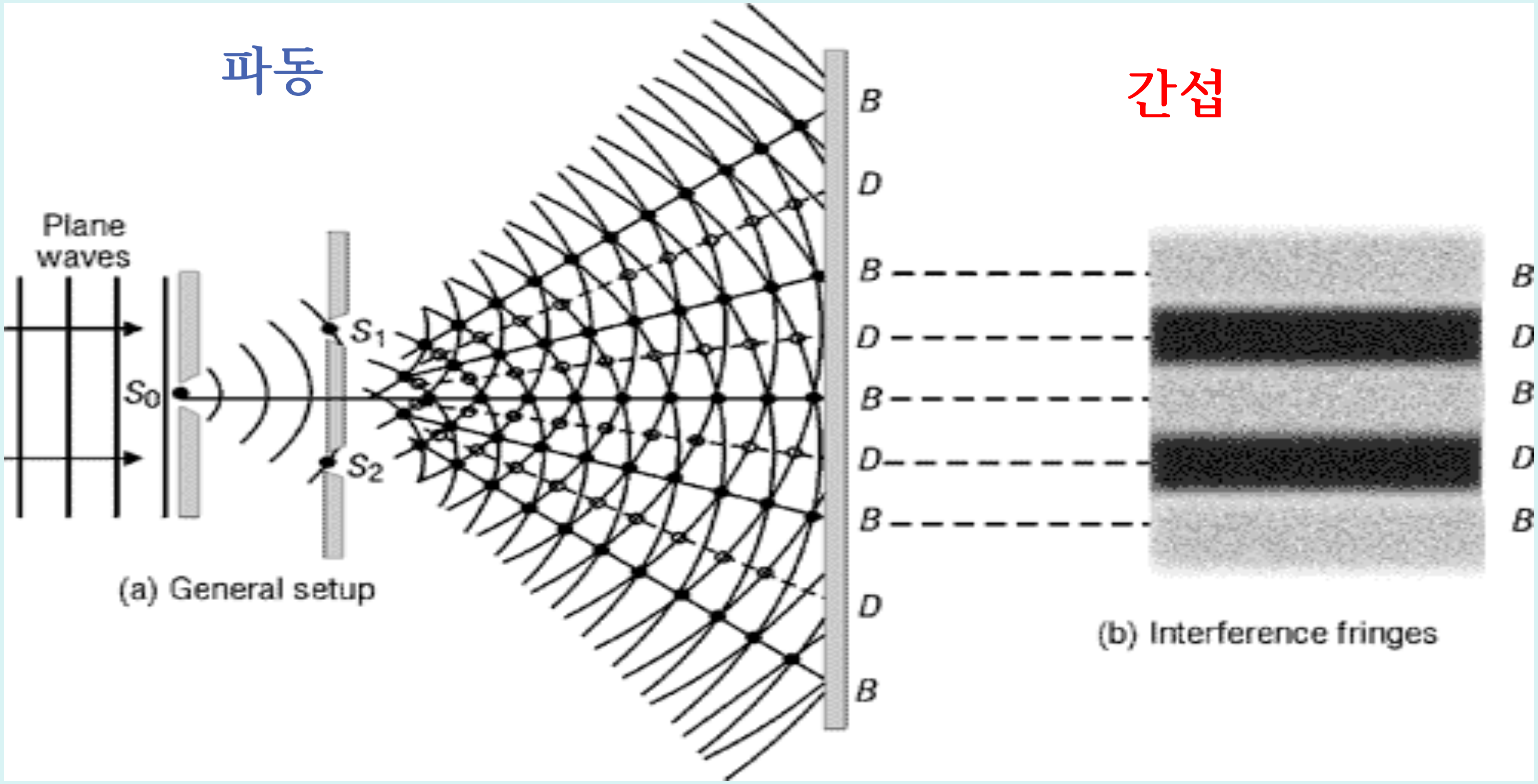


광원
(x_S, y_S, z_S)
A
B
Interference Pattern
$|\psi_A + \psi_B|^2$
1
0.5
0
-6000
0
6000
Detector Position (μm)
(x_D, y_D, z_D)

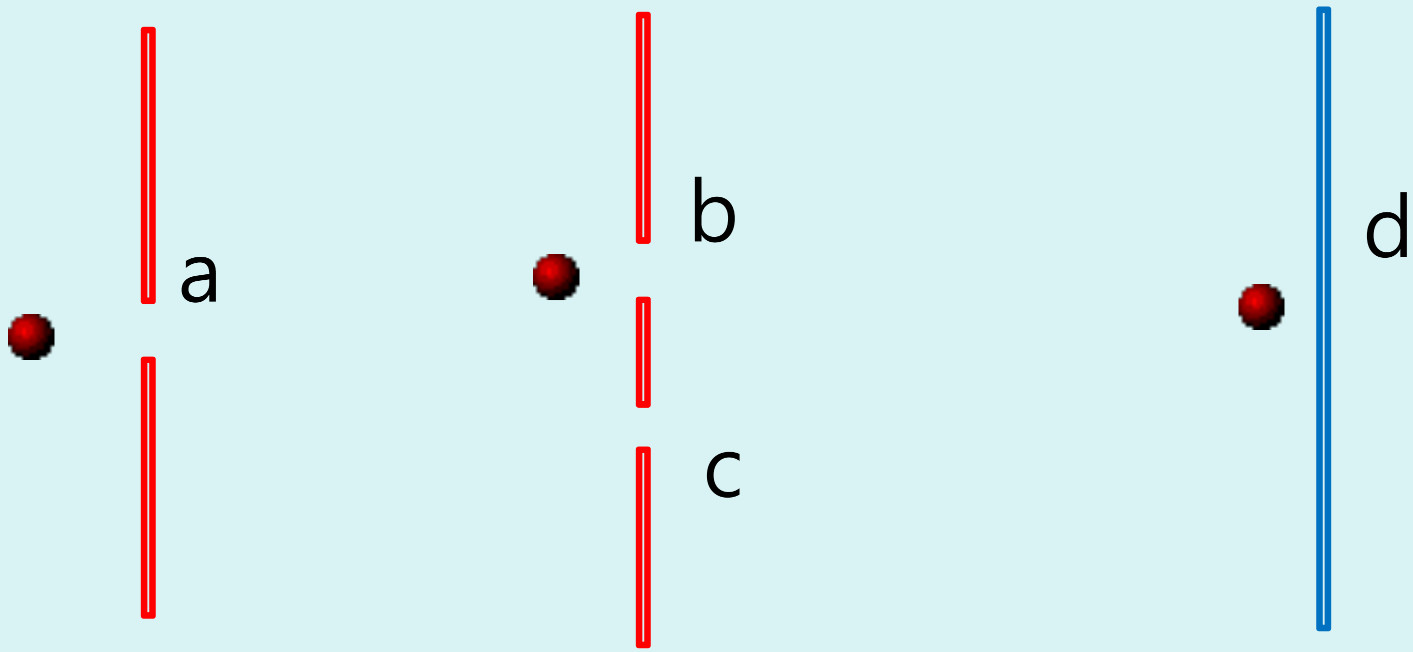
이중 슬릿 실험


C60
(xS, yS, zS)
A
B
Interference Pattern
|ψA + ψB|2
1
0.5
0
−6000
0
6000
Detector Position (μm)
(xD, yD, zD)

겹실틈double-slit 실험: 파동의 간섭



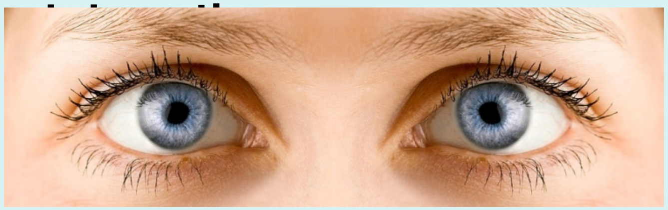
이중 슬릿 실험

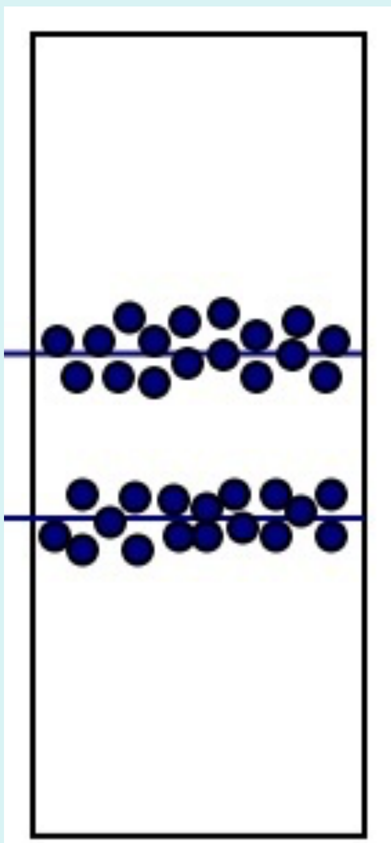


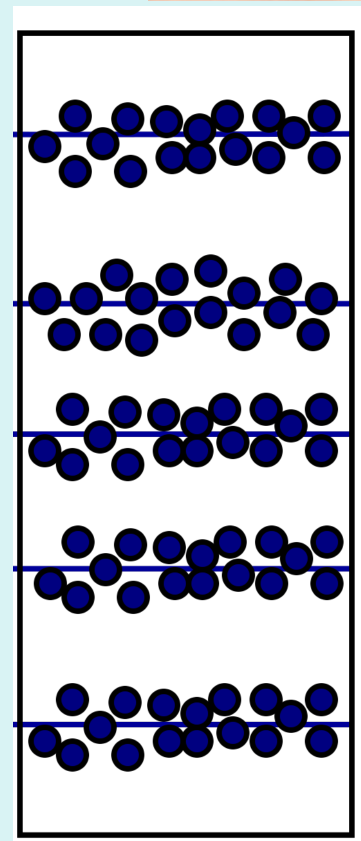
경우 1: (한 슬릿 씩만 열릴 때)

경우 2: (두 슬릿 다 열릴 때)

볼 때와 보지 않을 때?







양자 스키어

닐스 보어

There is no quantum world. There is only an **abstract quantum physical description.**

It is wrong to think that the task of physics is to find out **how nature is. (존재론)**

Physics concerns **what we can say about nature. (인식론)**

아인슈타인

“하이젠베르크-보어의 진정제(鎭靜劑) 철학 – 종교라 해야 하나? - 은 너무도 교묘하게 만들어져서 당분간 진실한 신도가 이것을 안락한 베개로 삼고 드러누워 쉽게 깨어나 지를 못하는군요.
그러니 그렇게 좀 누워있으라고 내버려두세요.”

슈뢰딩거에게 보낸 편지 (1928)

공간개념의 변화

고전역학 (3+1, 3+1) 차원

공간 3차원, 시간 1차원

운동량 공간 3차원, 에너지 공간 1차원

상대성이론 (4, 4) 차원

시공간 4차원 (x,y,z,ict)

운동량-에너지 공간 4차원 $(p_1, p_2, p_3, iE/c)$

양자역학 복합 4차원

시공간 4차원 (x,y,z,ict)

역(逆)시공간 4차원 $\hbar(k_1,k_2,k_3,i\omega/c)$

[운동량-에너지 공간 4차원 $(p_1, p_2, p_3, iE/c)$]

상태개념의 변화

고전역학, **상대성이론**:

대상의 상태: **위치, 운동량 공간의 값**

대상이 이들 값을 가진다(점유)고 생각함

양자역학:

점유 ⇒ 사건야기 성향

대상의 상태: **시공간의 함수**로 규정함.

이를 통해 **위치, 운동량** 등의 **기대치**가 추정됨

상태설정 및 확인 방식

고전역학, **상대성이론**:

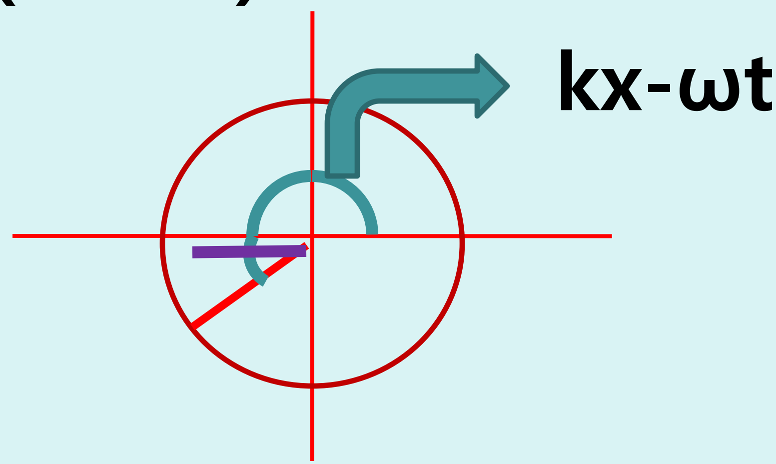
대상과 외부 변별체를 조우시켜 이들간의 상호작용에 의해 변별체에 나타난 흔적을 인식주체가 확인함으로써 **위치와 운동량의 값**들을 확인함.

양자역학:

측정의 방식은 원칙적으로 고전역학의 경우와 같으나 측정의 결과가 대상의 상태를 전환시키는 것으로 봄. 변별체에 아무 흔적이 나타나지 않는 경우에도 대상의 상태는 이에 해당하는 변화가 온 것으로 해석함

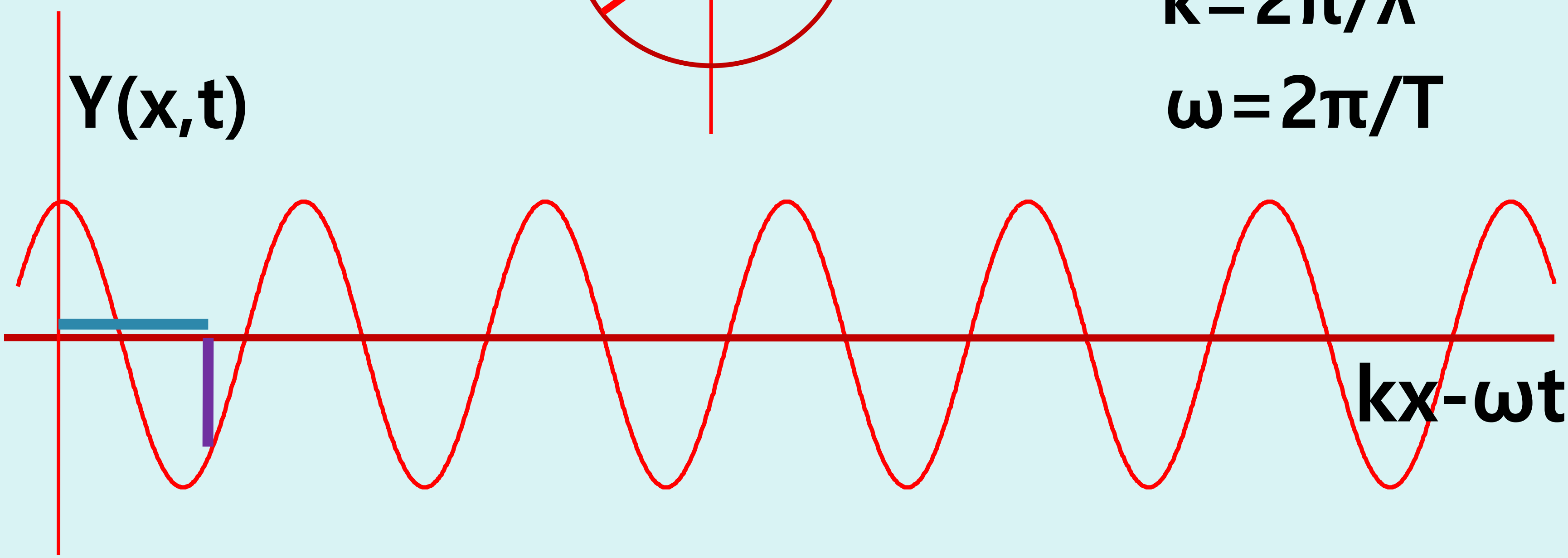
함수 cos(kx-ωt) 의 성질

$Y(x,t) = \cos(kx-\omega t)$



$k=2\pi/\lambda$

$\omega=2\pi/T$

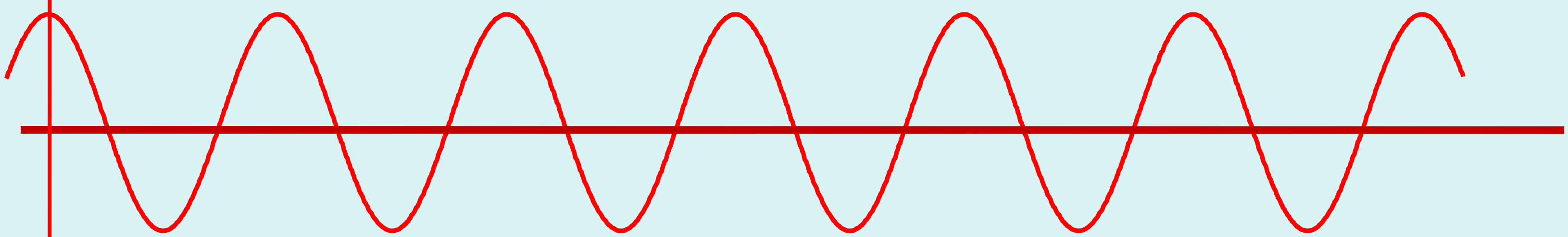


오일러의 등식: $e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\sin\theta$

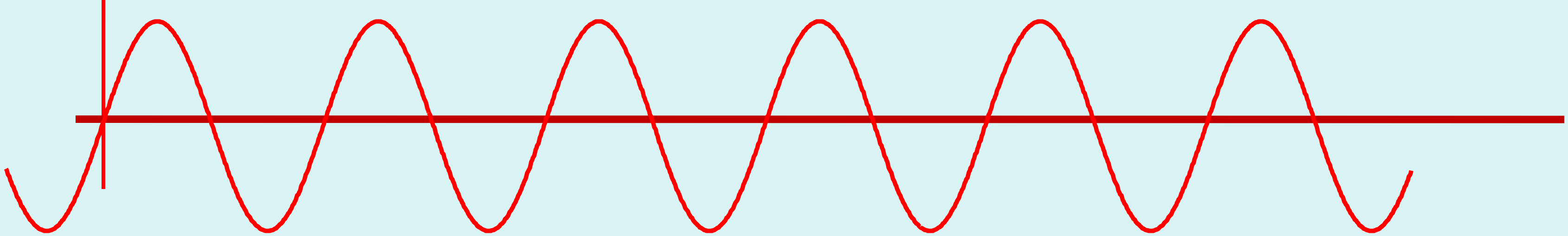
$$\exp[i(kx-\omega t)] \equiv \cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)$$

$\cos(kx-\omega t)$

$(i)^2 = -1$

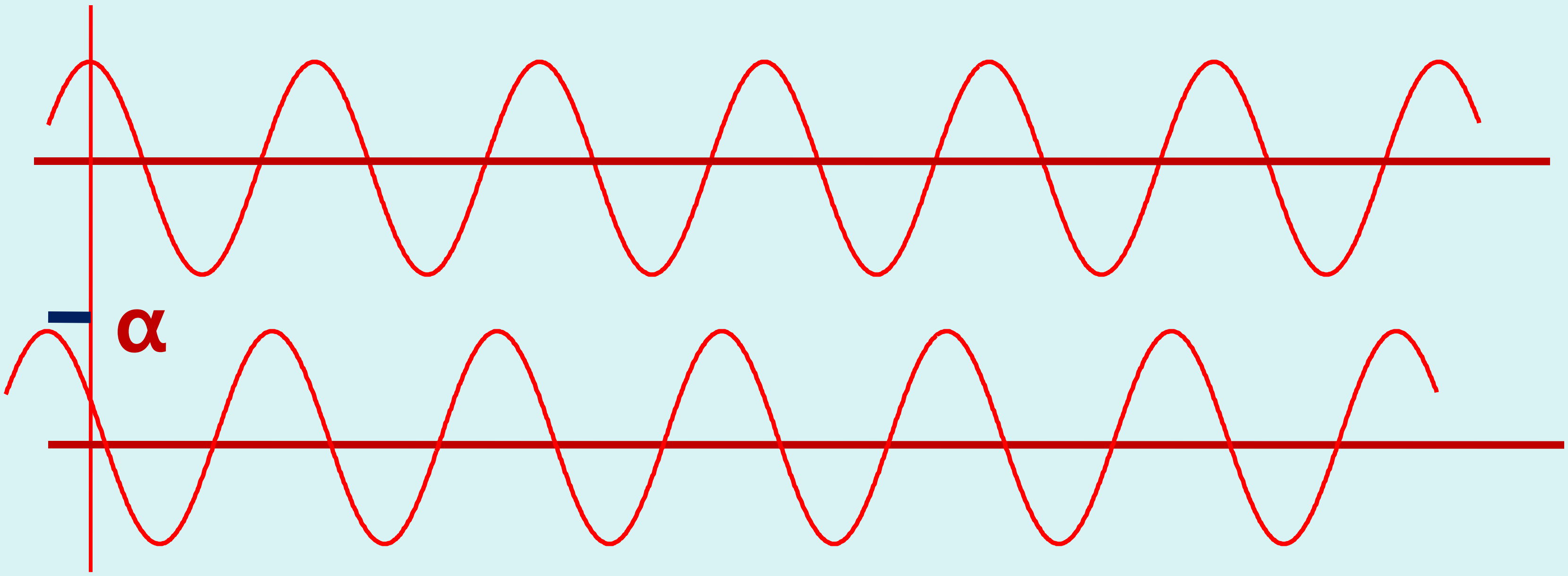


$\sin(kx-\omega t)$

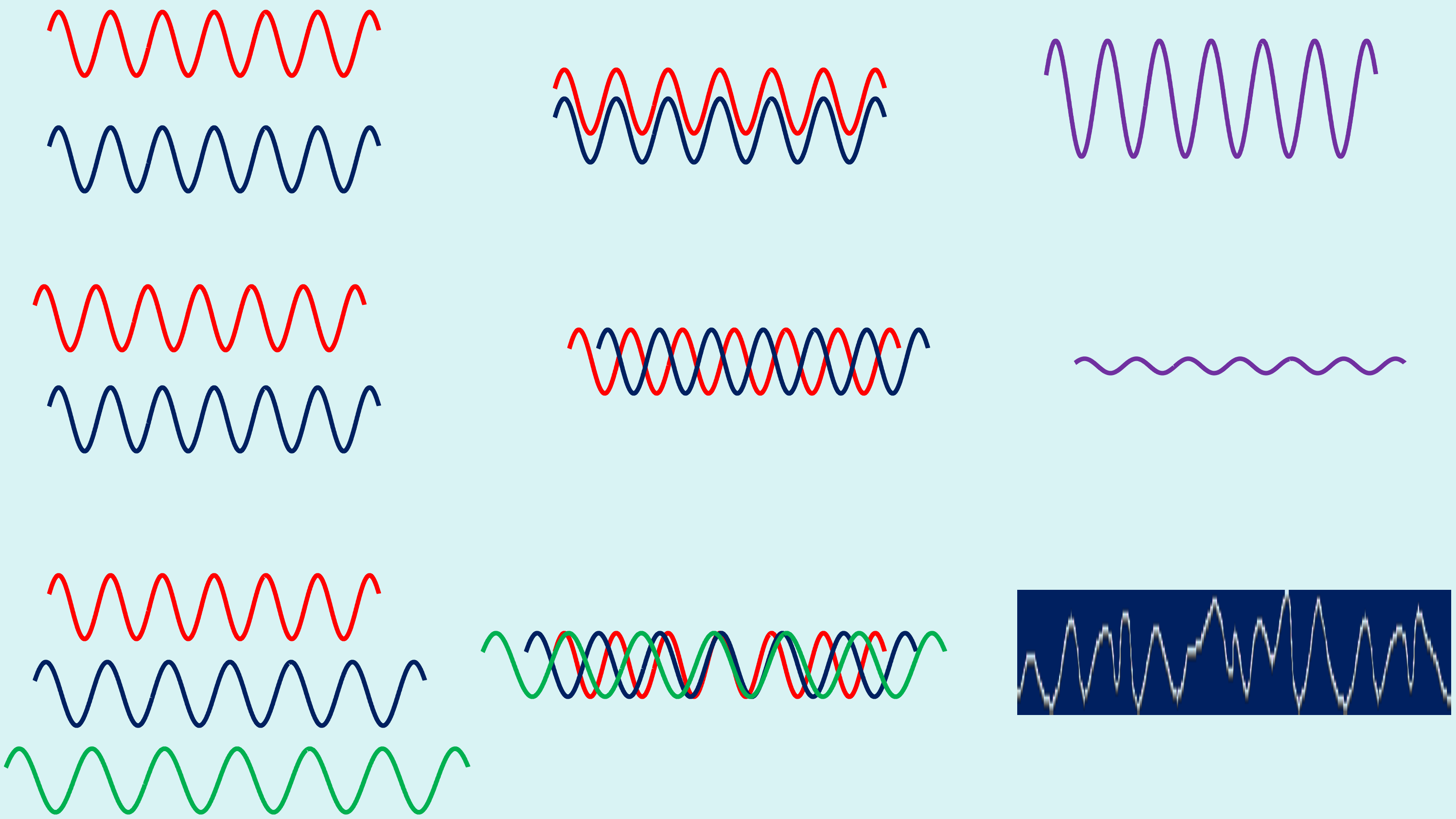


두 파동의 위상차

$\exp[i\,(kx-\omega t)]$, $\exp[i\,(kx-\omega t+\boldsymbol{\alpha})]$ **α: 위상차**



파동의 중첩



$$|\Psi(x,t)|^2 \equiv \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$$: **절대치 제곱**

$$\exp[i\,(kx-\omega t)] \equiv \cos(kx-\omega t) + i\,\sin(kx-\omega t)$$

$$|\exp[i\,(kx-\omega t)]|^2 = \exp[-i\,(kx-\omega t)]\exp[i\,(kx-\omega t)]$$

$$= \cos^2(kx-\omega t)+\sin^2(kx-\omega t) = 1$$

or $= \exp(0) = 1$

$\exp[i\,(kx-\omega t)]$ 함수의 미분

$$\exp[i\,x] \equiv \cos(x)+i\sin(x)$$

$$\begin{aligned}(d/dx)\ \exp[i\,x] &= -\sin(x)+i\cos(x)\\ &= i\,[\cos(x)+i\sin(x)]\\ &= i\exp[i\,x]\end{aligned}$$

$$(d/dx)\ \exp[i\,kx] = i\,k\exp[i\,x]$$

$$(\partial/\partial x)\ \exp[i\,(kx-\omega t)] = i\,k\ \exp[i\,(kx-\omega t)]$$

$$\mathbf{(-i)(\partial/\partial x)}\ \exp[i\,(kx-\omega t)] = \mathbf{k}\ \exp[i\,(kx-\omega t)]$$

$$\mathbf{i(\partial/\partial t)}\ \exp[i\,(kx-\omega t)] = \boldsymbol{\omega}\ \exp[i\,(kx-\omega t)]$$

고유함수, 고유치 (Eigen-function, Eigen-value**)**

상태 함수를 통한 상태 서술

상태 함수 $\Psi(x,t)$:

복소수 값을 지닌 시공간 변수 x,t 의 함수로,
대상의 존재가 외부로 표출될 성향을 나타냄

$<\Psi|\Psi> \equiv \int \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)\mathrm{d}x = 1$: 상태함수의 규격화

$<\Psi|x|\Psi> \equiv \int \Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)\mathrm{d}x$: 표출될 x값의 기대치

$|\Psi(x,t)|^2 \equiv \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$: 관련 변수의 표출 확률

상태 함수의 서술과 맞공간

상태 $\Psi(x,t)$: 각 시공간 점에서 순수 수치로 표현되는 함수

$$\Psi(x,t)=(1/2\pi)\int\Phi(k,\omega)\exp[i(kx-\omega t)]\,dk\,d\omega$$

$$\Phi(k,\omega)=(1/2\pi)\int\Psi(x,t)\exp[-i(kx-\omega t)]\,dx\,dt$$

함수 $\Phi(k,\omega)$를 알면 함수 $\Psi(x,t)$가 정해지며,

함수 $\Psi(x,t)$를 알면 함수 $\Phi(k,\omega)$가 정해짐

공간 (x,t) 안에서 임의의 함수 $\Psi(x,t)$를 나타내기 위해서는 맞공간 (k,ω)이 요청되며, 이 두 공간에서 표현된 두 함수 $\Psi(x,t)$와 $\chi(k,\omega)$는 서로 대등하다.

[cf 맞공간(reciprocal space): 역(逆)공간, 상반(相反)공간]

상태함수의 규격화와 기대치

$|\Psi(x,t)|^2 \equiv \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$: x,t 관련 수치의 표출 확률

$<\Psi|\Psi> \equiv \int \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)\mathrm{d}x = 1$: x관련 성향의 규격화

$<\Psi|x|\Psi> \equiv \int \Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)\mathrm{d}x$: 표출된 x값의 기대치

$|\chi(k,\omega)|^2 \equiv \chi^*(k,\omega)\chi(k,\omega)$: k,ω 관련 수치의 표출 확률

$<\chi|\chi> \equiv \int \chi^*(k,\omega)\chi(k,\omega)\mathrm{d}k = 1$: k관련 성향의 규격화

$<\chi|k|\chi> \equiv \int \chi^*(k,\omega)k\chi(k,\omega)\mathrm{d}k$: 표출된 k값의 기대치

흥미로운 물음

(x,t)공간의 함수 Ψ 와 맞공간 (k,ω)의 함수 χ 존재

$$\Psi(x,t)=(1/2\pi)\int\chi(k,\omega)\exp[i(kx-\omega t)]\,dk\,d\omega$$

$$\chi(k,\omega)=(1/2\pi)\int\Psi(x,t)\exp[-i(kx-\omega t)]\,dx\,dt$$

맞공간 (k,ω)와 맞함수 χ에 어떤 물리적 의미를 부여할 수 있나?

통상적 관점: 또 하나의 표상(representation))방식

새로운 관점: 운동량-에너지 공간

양자역학의 새 공리 체계

<공리 1> 존재물의 상태는 시공간의 함수 $\Psi(x,t)$ 로 표현되며,

$$\langle x\rangle \equiv \int \Psi^*(x,t)\, x\, \Psi(x,t)\,dx$$

는 이 존재물의 위치 x 의 기대치이다.

<공리 2> 함수 $\Psi(x,t)$의 푸리에 변환

$$\Phi(k,\omega)=(1/2\pi)\int \Psi(x,t)\exp[-i(kx-\omega t)]\,dx\,dt$$

으로 정의되는 맞공간 (k,ω)은 이것의 운동량-에너지 공간이며,

$$\langle k\rangle = \int \Phi^*(k,\omega)\, k\, \Phi(k,\omega)\,dk\,d\omega$$

$$\langle \omega\rangle = \int \Phi^*(k,\omega)\, \omega\, \Phi(k,\omega)\,dk\,d\omega$$

는 이 존재물의 운동량 k와 에너지 ω의 기대치이다.

양자역학의 새 공리 체계

<공리 3> 고전역학적 물리량들 사이의 관계식들은 위에 제시한 기대치들 사이의 관계식들에 해당한다.

<공리 4> 어떤 대상 존재물이 상태

$\Psi = \sum_i c_i \psi_i$ $(\sum_i |c_i|^2 = 1)$ $[= \Psi(x)$ $(\int \Psi^*(x)\Psi(x)dx=1)]$

에 놓여있다고 할 때, 지점 j에 해당하는 위치에 사건 유발 능력을 지닌 외부 물체를 설치해 대상과 접촉시킬 경우, 이 대상은 (1) 확률 $|c_j|^2$ 로 물체 위에 사건의 흔적을 남기면서, 자신은 ψ_j 만을 가진 상태, 곧 $\Psi = \psi_j$ 로 전환되거나, (2) 확률 $1-|c_j|^2$ 로 아무 흔적도 남기지 않고 성분 ψ_j 만 결여된 새 상태, 곧 $\Psi = \sum_{i\neq j} c_i \psi_i$ $[\sum_{i\neq j}|c_i|^2 = 1]$ 로 전환된다.

복합공간의 성질: 불확정성원리

$(\Delta A)^2 = \langle \Psi | (A-\langle A\rangle)^2 | \Psi \rangle \equiv \int |(A-\langle A\rangle)\Psi|^2 dx$

$(\Delta x)^2 = \langle \Psi | (x-\langle x\rangle)^2 | \Psi \rangle$

$(\Delta k)^2 = \langle \Psi | (k-\langle k\rangle)^2 | \Psi \rangle \quad k \equiv -i\partial/\partial x$

$I(\alpha) = \int |\alpha(x-\langle x\rangle)\Psi + i(k-\langle k\rangle)\Psi|^2 dx$

$= \alpha^2(\Delta x)^2 + (\Delta k)^2 + \alpha\int (x-\langle x\rangle)\partial/\partial x\,[\Psi^*\Psi]dx$

$= \alpha^2(\Delta x)^2 + (\Delta k)^2 - \alpha\int [\Psi^*\Psi]dx = \alpha^2(\Delta x)^2 + (\Delta k)^2 - \alpha$

$I(\alpha)$ to be positive definite for any real number α,

$1-4(\Delta x)^2(\Delta k)^2 \le 0$

$\boldsymbol{(\Delta x)(\Delta k) \ge 1/2}$

$\boldsymbol{(\Delta x)(\Delta p) \ge \hbar/2} \quad \boldsymbol{p = \hbar k}$

양자역학의 핵심공리 음미

"에너지-운동량 공간은 4차원 맞공간에
(보편상수 ħ를 곱한 것에) 해당한다."

ħ≡h/(2π) h: Planck 상수

4차원 위치-시간 공간 $(x, ic\text{t}) \Rightarrow \boldsymbol{(x,t)}$

4차원 에너지-운동량 공간 $(p, iE/c) \Rightarrow (p, E)$

4차원 맞공간 $\boldsymbol{(k, \omega)} \Leftrightarrow (-i\,\partial/\partial x,\ i\,\partial/\partial t)$

$(p, E) = (\hbar k, \hbar \omega) \Leftrightarrow (-i\hbar\,\partial/\partial x,\ i\hbar\,\partial/\partial t)$

관념 구조의 전환: 복합 4차원 세계

상대성이론 보편상수 c 도입

3차원(x,y,z)+1차원(t) ⇒ 4차원(x,y,z,ict)

≡ 4차원$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$

맞공간 4차원$(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\omega})$ (역할 없음)

3차원(p_1, p_2, p_3)+1차원(E) ⇒ 4차원$(p_1, p_2, p_3, iE/\mathrm{c})$

≡ 4차원$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{E})$

양자이론 보편상수 ħ 도입

4차원$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$+4차원$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{E})$ ⇒ 복합 4차원$[(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}), \hbar(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\omega})]$

≡ $[(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}), \hbar(-i\,\partial/\partial x, i\,\partial/\partial t)]$

복합 4차원 구조의 전초적 암시

1900 Max Planck

$E=h\nu=\hbar\omega$ 흑체복사 $\omega\equiv 2\pi/T$ (각진동수)

1905 Albert Einstein

$E=h\nu=\hbar\omega$ 광전효과

1914 Louis de Broglie

$p=h/\lambda=\hbar k$ 물질파 $k\equiv 2\pi/\lambda$ (각파동수)

우주의 공간구조 $[(x,t), \hbar(k,\omega)]$ 문제로 보지 못하고
파동이냐, 입자냐의 논란으로 혼란만을 키워 옴